# Γραμμική Άλγεβρα Ι, Ιανουάριος 2023, Τμήμα Α-Κ

**Θέμα 1 (15 Μόρια)**
Για τυχόντα φυσικό αριθμό $n \geq 2$ να υπολογίσετε την ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} n & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

**Θέμα 2 (30 Μόρια)**
Για $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων

$$(\Sigma)\ \begin{cases} (\lambda+6)x + 4y + 6z = 2\kappa + 1 \\ 2\lambda x + (\lambda+1)y + 3z = 2\kappa + 1 \\ 4x + 2y + 3z = \kappa \end{cases}$$

(i) (5 Μόρια) Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το $(\Sigma)$ είναι σύστημα Cramer.

(ii) (10 Μόρια) Να βρεθούν οι τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα $(\Sigma)$ να είναι συμβιβαστό.

(iii) (5 Μόρια) Να επιλυθεί το σύστημα $(\Sigma)$ για εκείνες τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες έχει άπειρες λύσεις.

(iv) (10 Μόρια) Αν $\lambda = 3$, θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ της οποίας ο πίνακας ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι ο πίνακας συντελεστών του $(\Sigma)$. Να δειχθεί ότι η $f$ είναι ισομορφισμός και να βρεθεί ο πίνακας του αντίστροφου ισομορφισμού $f^{-1}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

**Θέμα 3 (30 Μόρια)**
Θεωρούμε τους υπόχωρους του $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ του $\mathbb{R}^4$, με

$$\mathcal{V} = \langle (1,2,1,-2), (1,0,1,-1), (1,2,2,-3), \rangle \ \text{ και } \ \mathcal{W} = \langle (1,2,0,2), (1,-2,2,2), (2,-2,3,4) \rangle.$$

(i) (20 Μόρια) Να βρεθούν βάσεις για του υπόχωρους $\mathcal{V}, \mathcal{W}$, $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ και $\mathcal{V} + \mathcal{W}$.

(ii) (5 Μόρια) Να βρεθεί υπόχωρος $\mathcal{Z}$ του $\mathbb{R}^4$ ώστε $\mathbb{R}^4 = \mathcal{Z} \oplus \mathcal{W}$.

(iii) (5 Μόρια) Να βρεθεί ισομορφισμός $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{V}$, για κατάλληλο $n \in \mathbb{N}$.

**Θέμα 4 (25 Μόρια)**
Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, με

$$f(x,y,z,w) = (2x - y + 4z, y + 2z - 2w, 4x - 3y + 6z + 2w).$$

(i) (5 Μόρια) Να βρεθεί ο πίνακας $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ της $f$ ως προς τις κανονικές βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ των $\mathbb{R}^4$ και $\mathbb{R}^3$, αντίστοιχα.

(ii) (5 Μόρια) Να βρεθεί μία βάση του πυρήνα $\ker f$ της $f$ η οποία και να επεκταθεί σε μία βάση $\mathcal{B}'$ του $\mathbb{R}^4$.

(iii) (5 Μόρια) Να βρεθεί μία βάση της εικόνας $\operatorname{Im} f$ της $f$ η οποία και να επεκταθεί σε μία βάση $\mathcal{C}'$ του $\mathbb{R}^3$.

(iv) (5 Μόρια) Να βρεθεί ο πίνακας $A'$ της $f$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}'$ και $\mathcal{C}'$ των δύο προηγουμένων ζητημάτων.

(v) (5 Μόρια) Να βρεθούν αντιστρέψιμοι πίνακες $Q$ και $P$ έτσι ώστε $A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**